II– On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1°) Interpréter graphiquement u_n.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3°) Montrer que (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

III- On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2°) a) Montrer que pour tout réel positif t, $t+1 \geq 2\sqrt{t}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $F(x) \leq \frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-t}\,dt$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x (t+1)\,e^{1-t}\,dt = 3-(2+x)e^{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \frac{3}{2}$.

3°) On note pour tout $n \in IN^*$, S_n la somme des $(n-1)$ premier termes de la suite (u_n).

a) Justifier que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = F(n)$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente. Donner un encadrement de la limite de S_n.

EXERCICE N°6 : 20' 4 points

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \int_0^{U_n} \frac{dx}{3+\sin x} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

2°) a) Montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{3+\sin x} \leq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$.

3°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.